

Examen Final OBM GTO

Nivel 3

Guanajuato, Gto. 30 de abril del 2022.

Parte A

Cada problema vale 6 puntos y sólo tomaremos en cuenta la respuesta.

1. Sea $\triangle ABC$ y D el pie de la altura desde A . Se toma un punto E sobre la prolongación del segmento AB en dirección al punto B de tal forma que $BE = 5\text{cm}$. Si se sabe que $AD = 4\text{cm}$, $CD = 2\text{cm}$, ¿cuánto mide el segmento CE ?
2. Para un número de tres cifras, se define su cociente-de-suma como la división de éste entre la suma de sus dígitos. Por ejemplo, el para el número 207, su cociente-de-suma es $\frac{207}{2+0+7} = 9$. ¿Cuál es el mayor valor de un cociente-de-suma al considerar todos los números de tres cifras?
3. ¿Cuántos triángulos isósceles se pueden formar con los vértices de un polígono regular de 21 lados?
4. Una calculadora descompuesta no muestra el número 1 en la pantalla. Por ejemplo, si escribimos el número 3131, en la pantalla se ve escrito el número 33. Pepe escribió un número de 6 dígitos en la calculadora, pero apareció el 2022. ¿Cuántos número pudo haber escrito Pepe?
5. En un torneo de ajedrez, al ganador se le otorgan tres puntos, al perdedor cero y un punto a cada uno si hubo un empate. En 38 partidas, Said obtuvo 80 puntos. ¿Cuál es el máximo de partidas que Said pudo haber perdido?
6. Sea $ABCD$ un cuadrado. Se construyen los puntos E y F exteriores a $ABCD$ de manera que $\triangle ABF$ y $\triangle BCE$ son ambos equiláteros. Calcula la longitud del segmento de recta FE .
7. ¿Cuántos números menores a 1 millón tienen en su expansión decimal al menos dos 1's seguidos?
8. Usando los 36 vértices de una cuadrícula de 5×5 como vértices, ¿cuántos triángulos distintos se pueden formar? (Ojo: una línea recta no se considera un triángulo para este problema)
9. En la escuela hay seis estudiantes. Las chicas Ana, Bea y Ceci y los chicos Astro, Berto y Cui. Se van a sentar en una fila de 8 asientos, uno en cada uno y quedarán dos vacíos. ¿De cuántas maneras podemos sentar a las chicas y los chicos si no queremos que en asientos consecutivos estén un chico y una chica?
10. Encuentra la cantidad de números de seis cifras (mayores que 99,999 y menores que 1,000,000) tales que
 - i) No tienen cifras repetidas.
 - ii) Utiliza el 0 y el 9 o no utiliza ninguno. Utiliza el 1 y el 8 o no utiliza ninguno. Utiliza el 2 y el 7 o no utiliza ninguno. Utiliza el 3 y el 6 o no utiliza ninguno. Utiliza el 4 y el 5 o no utiliza ninguno.
 - iii) No hay dos dígitos en posiciones consecutivas que sumados den 9.

Un número que cumple es el 237860.

Parte B

Cada problema vale 20 puntos y daremos puntos por avances en la solución.

11. Sean p_1 , p_2 y p_3 tres números primos tales que $p_1 < p_2 < p_3$, $2p_2 = p_3 - 25$ y $p_1p_3 = 3p_1p_2 + 16$. Determina los valores de p_1 , p_2 y p_3 .
12. Diez niñas, numeradas del 1 al 10, se sientan alrededor de una mesa de cualquier manera. Cada niña recibe un nuevo número, que es la suma de su número y el de sus dos vecinas. Demuestra que alguna niña recibe un número mayor que 17.
13. Sean a, b, c, d cuatro rectas, ningún par de ellas paralelas. Sea A el triángulo que definen las intersecciones de las rectas b, c, d ; B el triángulo definido por las intersecciones de las rectas a, c, d ; C el triángulo definido por las intersecciones de las rectas a, b, d y D el triángulo definido por las intersecciones de las rectas a, b, c . Demuestra que hay un punto X que está en el circuncírculo del triángulo A , el de B , el de C y el de D .